

schreiben läßt. Für m_0 sehr groß, muß auch a sehr groß werden, d. h. für die Grenzflächenwelle $a \rightarrow \infty$, $m_0 \rightarrow \infty$ geht auch $a \rightarrow \infty$, d. h. wir kommen in diesem Fall wieder auf die homogene und unstetig in Luft übergehende Plasmaschicht zurück. Ob eine Grenzflächenwelle bei endlicher Frequenz auch bei einer Übergangsschicht (a endlich) auftritt, kann demnach diese Näherungslösung nicht entscheiden. Da

$a^2 = m_0^2 + \omega^2/c^2$ ist, treten Phasengeschwindigkeiten

$$v_p^2 = c^2 \frac{1}{1 + m_0^2 c^2/\omega^2}$$

kleiner als die Lichtgeschwindigkeit auf, die um so kleiner sind, je größer m_0 ist und um so rascher auf beiden Seiten der Übergangsschicht abfallen, je größer m_0 und m_1 sind.

Über die Beugung von Rohrwellen an ebenen Blenden

Von ROLF MÜLLER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. 5a, 617—621 [1950]; eingegangen am 12. Oktober 1950)

Im ersten einleitenden Abschnitt werden bekannte Beziehungen, die für das Folgende notwendig sind, zusammengestellt. Im zweiten Abschnitt wird das Beugungsproblem für Rohrwellen an ebenen Blenden allgemein formuliert. Im dritten Abschnitt wird für den speziellen Fall der konzentrischen Lochblende im kreiszylindrischen Rohr gezeigt, daß die Beugung einer einfallenden zylindersymmetrischen E - bzw. H -Welle durch E - bzw. H -Wellen allein beschrieben wird, also an der Blende keine Umwandlungen von E - in H -Wellen auftreten, während bei einer einfallenden E - bzw. H -Welle die vom Azimut φ abhängt, zur Beschreibung der Beugung beide Wellentypen notwendig sind, also Umwandlungen auftreten.

I.

Bekanntlich läßt sich jeder mit der Frequenz ω periodische, elektromagnetische Feldzustand in einem ideal leitenden Hohlrohr durch 2 skalare Felder $e(\xi, \eta, z)$ und $h(\xi, \eta, z)$ in folgender Weise ausdrücken¹:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} \mathfrak{E} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} e + k \text{ grad}' h \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' e) e^{i\omega t}, \\ i\sqrt{\Pi} \mathfrak{H} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} h + k \text{ grad}' e \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' h) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Striche an den Differentialoperatoren deuten an, daß in einer Querschnittsfläche $z = \text{const.}$, also nur nach den Koordinaten ξ, η der Querschnittsfläche zu differenzieren ist. \mathfrak{z} ist der Einheitsvektor in Richtung der Rohrachse, Π und Δ sind die Materialkonstanten des Dielektrikums im Rohr und $k = \omega \sqrt{\Pi \Delta}$ die Wellenzahl. Die Potentiale e und h müssen im Inneren des Hohlrohrs den Wellengleichungen:

$$\Delta e + k^2 e = 0, \quad \Delta h + k^2 h = 0 \quad (2)$$

¹ Siehe etwa E. Ruch, Ann. Physik 7, 248 [1950].

und auf dem Rohrmantel den Randbedingungen

$$e = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

genügen. Man verifiziert leicht, daß die durch die Gln. (1) bis (3) definierten Felder \mathfrak{E} und \mathfrak{H} im Inneren des Rohres den Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = i\omega \Pi \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = -i\omega \Delta \mathfrak{E} \quad (4)$$

genügen und auf dem Rohrmantel die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes \mathfrak{E}_{tg} verschwindet. Man bezeichnet Schwingungszustände mit verschwindendem Potential h als Schwingungen vom elektrischen Typus und solche mit verschwindendem Potential e als Schwingungen vom magnetischen Typus. Die allgemeinsten Lösungen der Gln. (2) lauten

$$\begin{aligned} e &= \sum_r \left(a_r^{(e)} e^{i\gamma_r^{(e)} z} + b_r^{(e)} e^{-i\gamma_r^{(e)} z} \right) \varphi_r, \\ h &= \sum_r \left(a_r^{(h)} e^{i\gamma_r^{(h)} z} + b_r^{(h)} e^{-i\gamma_r^{(h)} z} \right) \psi_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei bedeuten die $a_r^{(e)}, b_r^{(e)}, a_r^{(h)}, b_r^{(h)}$ willkürliche komplexe Konstanten, mit denen man die Lösung vorgegebenen Randbedingungen anpassen kann. Die φ_r, ψ_r , die nur von den Koordinaten ξ, η der Quer-



schnittsfläche abhängen, sind die Eigenlösungen der folgenden zweidimensionalen Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + z^2 \varphi &= 0 \text{ auf einer Querschnittsfläche } z = \text{const.}, \\ \varphi &= 0 \quad \text{auf dem Rande.} \end{aligned} \quad (6a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta \psi + z^2 \psi &= 0 \text{ auf einer Querschnittsfläche } z = \text{const.}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf dem Rande.} \end{aligned} \quad (6b)$$

Bezeichnet man die zu den Eigenlösungen φ_r bzw. ψ_r ² gehörigen Eigenwerte der Randwertprobleme Gln. (6) mit $\zeta_r^{(e)}$ bzw. $\zeta_r^{(h)}$, so erhält man für die Ausbreitungskonstanten $\gamma_r^{(e)}$ bzw. $\gamma_r^{(h)}$ der verschiedenen Rohrwellentypen

$$\begin{aligned} \gamma_r^{(e)} &= \sqrt{k^2 - (\zeta_r^{(e)})^2}, \\ \gamma_r^{(h)} &= \sqrt{k^2 - (\zeta_r^{(h)})^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

II.

Wir denken uns nun an der Stelle $z = 0$ eines unendlich ausgedehnten Rohres eine ebene, ideal leitende, unendlich dünne Blende angebracht; und bezeichnen die Querschnittsfläche $z = 0$, in der die Blende liegt, mit F , den Blendenschirm mit F_1 , die Blendenöffnung mit F_2 (s. Abb. 1). Auf die Blende mögen von links Wellen einfallen, die wir durch die Potentiale

$$\vec{e} = \sum_v a_v^{(e)} e^{i\gamma_r^{(e)} z} \varphi_v, \quad \vec{h} = \sum_v a_v^{(h)} e^{i\gamma_r^{(h)} z} \psi_v \quad (8)$$

kennzeichnen. Die Ausbreitungskonstanten γ_r der einfallenden Wellen seien reell. Solche Wellen sind bei vorgegebener Frequenz für jeden Rohrquerschnitt nur in endlicher Zahl vorhanden [s. Gl. (7)]. Von der Blende gehen symmetrisch nach beiden Seiten Beugungswellen aus, die wir durch die Potentiale

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \begin{cases} \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(e)} e^{i\gamma_r^{(e)} z} \varphi_v & \text{für } z > 0, \\ \sum_{v=1}^{\infty} b_v^{(e)} e^{-i\gamma_r^{(e)} z} \varphi_v & \text{für } z < 0, \end{cases} \\ \vec{h} &= \begin{cases} \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(h)} e^{i\gamma_r^{(h)} z} \psi_v & \text{für } z > 0, \\ \sum_{v=1}^{\infty} b_v^{(h)} e^{-i\gamma_r^{(h)} z} \psi_v & \text{für } z < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

² Wir werden später die Eigenlösungen nach 2 Indizes numerieren.

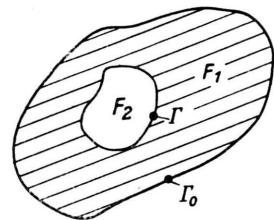


Abb. 1

kennzeichnen wollen. Für die Beugungswellen müssen wir natürlich auch solche mit imaginären Ausbreitungskonstanten γ_r zulassen. Mit den Grenzwerten:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 0} \overset{\leftrightarrow}{e} &= \overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0}, \\ \lim_{z \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \overset{\leftrightarrow}{e} &= \overset{\leftrightarrow}{e}'_{\pm 0}, \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 0} \overset{\leftrightarrow}{h} &= \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0}, \\ \lim_{z \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial z} \overset{\leftrightarrow}{h} &= \overset{\leftrightarrow}{h}'_{\pm 0} \end{aligned} \right| \quad (10)$$

folgt für die Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes der Beugungswellen auf beiden Seiten der Blendenfläche nach Gl. (1)

$$\begin{aligned} &\sqrt{A} \mathfrak{E}_{\pm 0} \\ &= \text{grad}' \overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0} + k \text{grad}' \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0} \times \mathfrak{j} - \mathfrak{j} \text{div grad}' \overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0}, \\ &i \sqrt{H} \mathfrak{H}_{\pm 0} \\ &= \text{grad}' \overset{\leftrightarrow}{h}'_{\pm 0} + k \text{grad}' \overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0} \times \mathfrak{j} - \mathfrak{j} \text{div grad}' \overset{\leftrightarrow}{h}'_{\pm 0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Damit durch die Gln. (11) die Werte des elektrischen bzw. magnetischen Feldes auf der ganzen Querschnittsfläche erklärt sind, müssen wir von unseren Grenzwerten $\overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0}, \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0}, \overset{\leftrightarrow}{e}'_{\pm 0}, \overset{\leftrightarrow}{h}'_{\pm 0}$ verlangen, daß sie in dem abgeschlossenen Bereich F , d. h. unter Einschluß der Blendenkante Γ und des Randes I_0 , mit der die Blende an die Rohrwand grenzt, stetig sind; die $\overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0}, \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0}$ müssen darüber hinaus dort auch noch stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen. Nun folgt aus den Gln. (9), daß $\overset{\leftrightarrow}{e}, \frac{\partial}{\partial n} \overset{\leftrightarrow}{h}$ auf dem Rohrmantel verschwinden, also müssen wegen der geforderten Stetigkeit die $\overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0}, \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0}$, auch wenn man sich aus der Blendenfläche her dem Rande I_0 nähert, die Randwerte

$$\overset{\leftrightarrow}{e}_{\pm 0} = 0, \quad \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{h}_{\pm 0}}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

annehmen.

Da die Transversalkomponente des elektrischen Feldes auf der Blendenebene F (eventuell unter Ausschluß der Blendenkante Γ) bezüglich der Koordinate z stetig sein muß, folgen aus den Gln. (11) zusammen mit den Gln. (9) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{e}_+ &= -\overleftrightarrow{e}_-, & \overleftrightarrow{h}_+ &= \overleftrightarrow{h}_-, \\ \overleftrightarrow{e}'_+ &= \overleftrightarrow{e}'_-, & \overleftrightarrow{h}'_+ &= -\overleftrightarrow{h}'_-. \end{aligned} \quad (13)$$

Wir können uns also auf die Grenzwerte für $z \rightarrow +0$ beschränken und führen die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{e}_0 &= \overleftrightarrow{e}'_0 = -\overleftrightarrow{e}_-, & \overleftrightarrow{h}_0 &= \overleftrightarrow{h}'_0 = \overleftrightarrow{h}_-, \\ \overleftrightarrow{e}'_0 &= \overleftrightarrow{e}'_+ = \overleftrightarrow{e}'_-, & \overleftrightarrow{h}'_0 &= \overleftrightarrow{h}'_+ = -\overleftrightarrow{h}'_-. \end{aligned} \quad (14)$$

Nun muß auf dem Blendschirm F_1 das gesamte elektrische Transversalfeld, das sich aus dem Feld der einfallenden Wellen und dem Feld der Beugungswellen zusammensetzt, verschwinden und in der Blendenöffnung das gesamte magnetische Transversalfeld bezüglich z stetig sein. Es muß also wegen Gl. (1) und (13) gelten:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}'(\overleftrightarrow{e}_0 + \overleftrightarrow{e}'_0) + k \operatorname{grad}'(\overleftrightarrow{h}_0 + \overleftrightarrow{h}'_0) \times \mathbf{j} &= 0 \text{ auf } F_1, \\ \operatorname{grad}'\overleftrightarrow{h}'_0 + k \operatorname{grad}'\overleftrightarrow{e}_0 \times \mathbf{j} &= 0 \text{ auf } F_2. \end{aligned} \quad (15)$$

\overleftrightarrow{e}_0 und \overleftrightarrow{h}_0 sind die Werte von \overleftrightarrow{e} bzw. \overleftrightarrow{h} an der Stelle $z = 0$. Die Gln. (15) sind nun im wesentlichen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die wir durch folgenden Ansatz befriedigen können

$$\left. \begin{aligned} \overleftrightarrow{e}'_0 + \overleftrightarrow{e}'_0 &= u \\ -k(\overleftrightarrow{h}_0 + \overleftrightarrow{h}'_0) &= v \end{aligned} \right\} \text{auf } F_1 \quad \left. \begin{aligned} k\overleftrightarrow{e}_0 &= \bar{u} \\ \overleftrightarrow{h}'_0 &= \bar{v} \end{aligned} \right\} \text{auf } F_2, \quad (16)$$

wobei zwischen den Real- bzw. Imaginärteilen der Funktionen u und v die Relationen bestehen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) + i \operatorname{Re}(v) &= f_1(q), & \operatorname{Re}(\bar{u}) + i \operatorname{Re}(\bar{v}) &= f_3(q), \\ \operatorname{Jm}(u) + i \operatorname{Jm}(v) &= f_2(q), & \operatorname{Jm}(\bar{u}) + i \operatorname{Jm}(\bar{v}) &= f_4(q). \end{aligned} \quad (16a)$$

Die Funktionen f_1 bis f_4 sind analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $q = x + iy$ (x und y sind die kartesischen Koordinaten der Querschnittsfläche), die nur durch die Forderung eingeschränkt sind, daß ihre Realteile auf dem Rande Γ_0 , soweit ihr Definitionsbereich daran grenzt, verschwinden [siehe Gln. (3) bzw. (12)]. Wegen der Gln. (9) besitzen die Grenzwerte der Potentiale \overleftrightarrow{e} und \overleftrightarrow{h} bzw. ihre Ableitungen nach z die folgenden Fourier-Entwicklungen

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{e}_0 &= \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(e)} \varphi_v, & \overleftrightarrow{e}'_0 &= i \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(e)} \gamma_v^{(e)} \varphi_v, \\ \overleftrightarrow{h}_0 &= \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(h)} \psi_v, & \overleftrightarrow{h}'_0 &= i \sum_{v=1}^{\infty} a_v^{(h)} \gamma_v^{(h)} \psi_v. \end{aligned} \quad (17)$$

Mit den Gln. (16) und (17) zusammen mit den oben geforderten Stetigkeitsbedingungen für die Grenzwerte der Potentiale \overleftrightarrow{e} und \overleftrightarrow{h} bzw. ihrer Ableitungen nach z haben wir das Beugungsproblem für Rohrwellen an ebenen Blenden vollständig formuliert.

III.

Wir spezialisieren nun unseren Ansatz, der zunächst für beliebige Rohrquerschnitte und Blendenformen gilt, auf das kreiszylindrische Rohr (vom Radius r_0) mit einer konzentrischen Lochblende. Es ist zweckmäßig, in diesem Falle q durch die Polarkoordinaten r, φ auszudrücken. Es gilt

$$q = r e^{i\varphi}. \quad (18)$$

Nun läßt sich jede analytische Funktion $f(q)$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich, wie er bei der Blendenöffnung F_2 vorliegt, durch eine Potenzreihe darstellen

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} c_v r^v e^{iv\varphi} \quad (19)$$

und in einem Ringbereich, wie er bei dem Blendschirm F_1 vorliegt, durch eine Laurent-Reihe

$$f(q) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v r^v e^{iv\varphi}. \quad (19a)$$

Da auf dem Rande Γ_0 der Realteil von f verschwinden muß, sind die c_v und c_{-v} nicht voneinander unabhängig, sondern es gilt für $v \neq 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_v) &= -r_0^{-2v} \operatorname{Re}(c_{-v}), \\ \operatorname{Jm}(c_v) &= r_0^{-2v} \operatorname{Jm}(c_{-v}) \end{aligned} \quad (20)$$

und für $v = 0$

$$\operatorname{Re}(c_0) = 0. \quad (21)$$

Wegen der Linearität unserer Feldgleichungen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die einfallende Welle nicht aus einem Komplex elektrischer und magnetischer Wellen verschiedener Typen zusammengesetzt ist, sondern daß nur eine einzige elektrische oder magnetische Welle von bestimmter Struktur einfällt. Die Potentiale der einfallenden Welle sind dann durch

bzw.

$$\begin{aligned} \vec{e} &= a_n^{(e)} e^{i\gamma_n^{(e)} z} \varphi_n, & \vec{h} &= 0, \\ \vec{e} &= 0, & \vec{h} &= a_n^{(h)} e^{i\gamma_n^{(h)} z} \psi_n \end{aligned} \quad (22)$$

gegeben. Für das kreiszylindrische Rohr haben nun bekanntlich die Eigenlösungen der Gln. (6) die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi_{r,\mu} &= N I_r \left(\gamma_{r,\mu}^{(e)} \frac{r}{r_0} \right) \cos r\varphi, \\ \psi_{r,\mu} &= \bar{N} I_r \left(\gamma_{r,\mu}^{(h)} \frac{r}{r_0} \right) \cos r\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

Die Numerierung der Eigenlösungen und Eigenwerte nach den beiden Indizes r und μ ergibt sich auf Grund des Separationsansatzes, der zur Lösung des Randwertproblems Gl. (4) führt. Die N, \bar{N} sind gewisse Normierungsfaktoren, I_r die Bessel-Funktionen r -ter Ordnung $\gamma_{r,\mu}^{(e)}$ und $\gamma_{r,\mu}^{(h)}$, die zu den Eigenlösungen $\varphi_{r,\mu}$ bzw. $\psi_{r,\mu}$ gehörigen Eigenwerte, die sich als μ -te Wurzeln der Gleichungen

$$I_r(y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad I'_r(y) = 0$$

ergeben. Denken wir uns nun eine elektrische (magnetische) Welle einfallen, deren Potential $\vec{e}(\vec{h})$ proportional zu $\cos n\varphi$ ist, so muß aus Symmetriegründen auch das Potential $\vec{e}'(\vec{h})$ der Beugungswellen die gleiche Winkelabhängigkeit zeigen. Aus den Gln. (16) folgt damit für eine einfallende E -Welle unter Beachtung der Gl. (20)

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 + \vec{e}'_0 = c_1 (r^n - r_0^{-2n} r^{-n}) \cos n\varphi \\ \vec{h} = -\frac{c_1}{k} (r^n + r_0^{-2n} r^{-n}) \sin n\varphi \end{cases} \quad \text{auf } F_1,$$

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 = \frac{c_2}{k} r^n \cos n\varphi \\ \vec{h}'_0 = c_2 r^n \sin n\varphi \end{cases} \quad \text{auf } F_2,$$
(24)

für eine einfallende H -Welle:

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 = c_1 (r^n - r_0^{-2n} r^{-n}) \sin n\varphi \\ \vec{h}_0 + \vec{h}_0 = \frac{c_1}{k} (r^n + r_0^{-2n} r^{-n}) \cos n\varphi \end{cases} \quad \text{auf } F_1,$$

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 = \frac{c_2}{k} r^n \sin n\varphi \\ \vec{h}'_0 = c_2 r^n \cos n\varphi \end{cases} \quad \text{auf } F_2.$$
(25)

Die Gl. (24) und (25) gelten nur für $n \neq 0$. Ist die einfallende Welle vom Azimut φ unabhängig, also $n = 0$, so wird aus den Gln. (6) bei einer einfallenden E -Welle:

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 + \vec{e}'_0 = 0 \\ \vec{h}_0 = c_1 \end{cases} \quad \text{auf } F_1, \quad \begin{cases} \vec{e}_0 = c_2 \\ \vec{h}'_0 = c_3 \end{cases} \quad \text{auf } F_2, \quad (26)$$

bei einer einfallenden H -Welle:

$$\begin{cases} \vec{e}'_0 = 0 \\ \vec{h}_0 + \vec{h}_0 = c_1 \end{cases} \quad \text{auf } F_1, \quad \begin{cases} \vec{e}_0 = c_2 \\ \vec{h}'_0 = c_3 \end{cases} \quad \text{auf } F_2. \quad (27)$$

Die Konstante c_1 in der 2. Gl. (27) kann man Null setzen, da eine additive Konstante beim Potential \vec{h} der einfallenden Welle belanglos ist.

Die Gln. (16) nehmen in beiden Fällen die Form:

$$\begin{cases} \vec{e}_0 = \sum_{\mu} a_{\mu}^{(e)} \varphi_{n,\mu}, & \vec{h}_0 = \sum_{\mu} a_{\mu}^{(h)} \psi_{n,\mu}, \\ \vec{e}'_0 = \sum_{\mu} a_{\mu}^{(e)} \gamma_{n,\mu}^{(e)} \varphi_{n,\mu}, & \vec{h}'_0 = i \sum_{\mu} a_{\mu}^{(h)} \gamma_{n,\mu}^{(h)} \psi_{n,\mu} \end{cases} \quad (28)$$

an. Wir haben mit den Gln. (24) bis (28) das Beugungsproblem auf eine Form gebracht, die es uns erlaubt, die Frage zu entscheiden, ob bei einer einfallenden elektrischen (magnetischen) Welle elektrische (magnetische) Wellen allein genügen, die Beugungswelle zu beschreiben.

Es werde zunächst der Fall betrachtet, daß eine vom Azimut φ unabhängige elektrische Welle einfällt. Aus den Gln. (26) folgt³

$$\int_F (\vec{h}'_0 - c_3) \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{h}_0^* df = 0. \quad (29)$$

Nun muß nach unserer obigen Voraussetzung \vec{h}_0 in F stetig sein und ist somit beschränkt. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{h}_0$ ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\operatorname{grad} \vec{h}_0$ in F integrierbar. Es existieren also alle Entwicklungskoeffizienten $\int_F \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{h}_0^* \psi_{0,\mu} df$, die sich, wie eine leichte Umformung zeigt, zu

$$\int_F \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{h}_0^* \psi_{0,\mu} df = a_{\mu}^{(h)*} (z_{0,\mu}^{(h)})^2 \quad (30)$$

ergeben. Nun gilt für die hier betrachteten Orthogonalfunktion die folgende Erweiterung des Parseval-schen Satzes⁴:

Ist u eine beschränkte Funktion mit den Entwicklungskoeffizienten a_r und v eine integrierbare Funktion mit den Entwicklungskoeffizienten b_r , so ist:

$$\int_F u v df = \sum a_r b_r. \quad (31)$$

³ \vec{h}_0^* ist konjugiert komplex zu \vec{h}_0 .

⁴ Enzykl. Math. Wiss., Bd. II 3, 2, S. 1237, Fußnote.

Es folgt also aus Gln. (29), wenn man beachtet, daß jede Konstante eine Eigenlösung der Gln. (6 b) zum Eigenwert $\zeta_{0,0}^{(h)} = 0$ ist,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{\mu}^{(h)}|^2 \gamma_{0,\mu}^{(h)} (\zeta_{0,\mu}^{(h)})^2 = 0. \quad (32)$$

Da die $\gamma_{0,\mu}^{(h)}$ nur positiv reelle oder positiv imaginäre Werte annehmen können, folgt aus Gl. (32), daß alle $a_{\mu}^{(h)}$ verschwinden, also $\overset{\leftrightarrow}{h} \equiv 0$ wird. Wir haben damit gezeigt, daß sich bei einer einfallenden zylindersymmetrischen E -Welle die Beugungswelle aus E -Wellen allein zusammensetzt, also weder homogene noch inhomogene H -Wellen auftreten können. Das entsprechende Ergebnis erhält man für eine einfallende zylindersymmetrische H -Welle. Die Gln. (26) und (27) vereinfachen sich damit weiter zu

$$\overset{\leftrightarrow}{e'_0} + \vec{e}_0 = 0 \text{ auf } F_1, \quad \overset{\leftrightarrow}{e_0} = c \text{ auf } F_2, \quad \overset{\leftrightarrow}{h_0} = 0 \quad (33)$$

und

$$\overset{\leftrightarrow}{h_0} + \overset{\rightarrow}{h_0} = 0 \text{ auf } F_1, \quad \overset{\leftrightarrow}{h'_0} = c \text{ auf } F_2, \quad \overset{\leftrightarrow}{e_0} = 0. \quad (34)$$

Die so vereinfachten Bedingungen für die Potentiale e und h auf der Blendenfläche legen ein Näherungsverfahren zu ihrer Berechnung nahe, über das an anderer Stelle berichtet werden soll.

Wir betrachten nun den Fall, daß die einfallende Welle vom Azimut φ abhängt und werden zeigen, daß es keine mit den vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen verträgliche Lösung der Gln. (24) und (28) bzw. (25) und (28) gibt, für die, wie im Falle der zylindersymmetrischen Wellen, $\overset{\leftrightarrow}{h}_0$ bzw. \vec{e}_0 verschwindet. Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an, es gäbe eine Lösung der Gln. (24) und (28), für die $\overset{\leftrightarrow}{h} \equiv 0$ ist. Die Gln. (25) gehen dann über in

$$\overset{\leftrightarrow}{e'_0} + \overset{\rightarrow}{e'_0} = 0 \text{ auf } F_1, \quad \overset{\leftrightarrow}{e_0} = 0 \text{ auf } F_2. \quad (35)$$

Das Potential \vec{e} der einfallenden Welle sei

$$\vec{e} = \vec{a} \varphi_{n,\mu} e^{i \gamma_{n,\mu} z}. \quad (36)$$

Aus den Gln. (35) folgt nun

$$\int_F (\overset{\leftrightarrow}{e'_0} + \overset{\rightarrow}{e'_0}) \overset{\rightarrow}{e_0}^* df = 0. \quad (37)$$

Also ist nach dem Parsevalschen Satz, wegen der Gln. (28) und (36),

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}|^2 \gamma_{n,\nu}^{(e)} + \vec{a} a_{\mu}^{(e)*} \gamma_{n,\mu}^{(e)} = 0. \quad (38)$$

Weiter ist

$$\int_F (\overset{\leftrightarrow}{e'_0} + \overset{\rightarrow}{e'_0}) \operatorname{div} \operatorname{grad} \overset{\leftrightarrow}{e_0}^* df = 0. \quad (39)$$

Aus Gl. (39) können wir wegen der vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen vermöge der oben erwähnten Erweiterung des Parsevalschen Satzes wieder auf

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}|^2 \gamma_{n,\nu}^{(e)} (\zeta_{n,\nu}^{(e)})^2 + \vec{a} a_{\mu}^{(e)*} \gamma_{n,\mu}^{(e)} (\zeta_{n,\mu}^{(e)})^2 = 0 \quad (40)$$

schließen. Multipliziert man die Gl. (38) mit $(\zeta_{n,\mu}^{(e)})^2$ und subtrahiert sie von der Gl. (40), so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}|^2 \gamma_{n,\nu}^{(e)} ((\zeta_{n,\nu}^{(e)})^2 - (\zeta_{n,\mu}^{(e)})^2) = 0. \quad (41)$$

Da nach unserer Voraussetzung die einfallende Welle eine homogene Welle, d.h. eine solche mit reeller Ausbreitungskonstante $\gamma_{n,\mu}^{(e)}$ ist, ist der zugehörige Eigenwert $\zeta_{n,\mu}^{(e)}$ sicher kleiner als der niedrige, zu einer imaginären Ausbreitungskonstante gehörige Eigenwert $\zeta_{n,\sigma}^{(e)}$. Damit folgt aber aus Gl. (41), daß alle $a_{\nu}^{(e)}$ für $\nu \geq \sigma$ verschwinden. Wir erhalten also für $\overset{\leftrightarrow}{e}_0$ die Darstellung

$$\overset{\leftrightarrow}{e}_0 = \sum_{\nu=1}^{\sigma} a_{\nu} \varphi_{n,\nu}. \quad (42)$$

Nun sind unsere Eigenlösungen $\varphi_{n,\nu}$ und damit auch jede endliche Linearkombination solcher Eigenlösungen analytische Funktionen, die keine Häufungsstelle von Nullstellen haben können. Es folgt also aus Gl. (42) und der zweiten Gl. (35), daß auch die a_{ν} für $\nu < \sigma$ verschwinden. Damit gibt die erste Gl. (35) wegen der zweiten Gl. (28)

$$\vec{e}_0 = 0, \quad (43)$$

im Widerspruch zu Gl. (36). In ganz analoger Weise gelangt man zu einem Widerspruch, wenn man annimmt, daß bei einer vom Azimut φ abhängigen einfallenden H -Welle die Beugungswelle durch H -Wellen allein beschrieben werden kann. Es ist also gezeigt, daß im Gegensatz zu den Verhältnissen bei den zylindersymmetrischen Wellen bei einer einfallenden E - bzw. H -Welle die vom Azimut φ abhängt, zur Beschreibung der Beugungswelle beide Wellentypen notwendig sind. An der Blende treten also in diesem Falle immer Umwandlungen von E - in H -Wellen und umgekehrt auf.